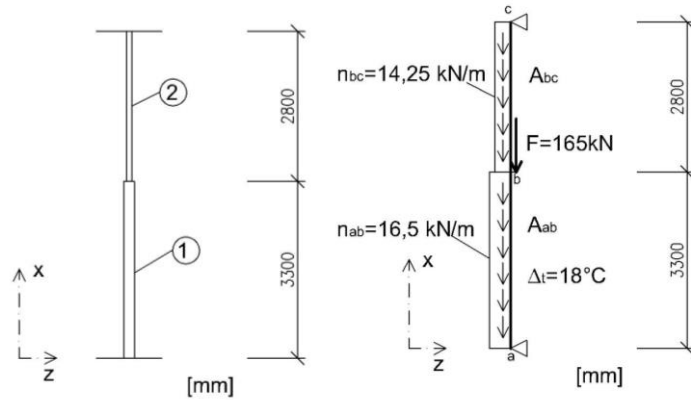


## Osově namáhaný prut – průběhy veličin

### Zadání



Obr.: Zadání - výpočtový model

Ocelový sloup složený ze dvou částí je neposuvně ukotven na obou koncích v tuhém rámu.

Dolní část je vysoká 3,3 m a je z průřezu 1 - HEB 160 (průřezová plocha  $A_{ab} = 5,425 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ).

Horní část je vysoká 2,8 m a je z průřezu 2 - HEB 100 (průřezová plocha  $A_{bc} = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ).

Materiálem je Ocel S 235 (modul pružnosti  $E = 210 \text{ GPa}$ ; součinitel teplotní roztažnosti  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ).

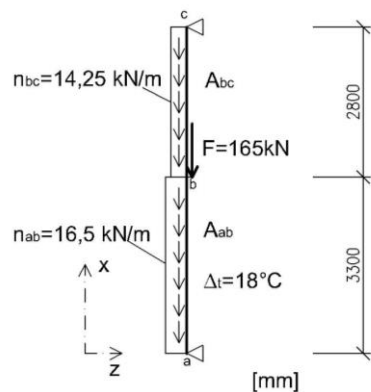
Spojitě osově zatížení v dolní části (směrem dolů) je  $n_{ab} = 16,5 \text{ kN/m}$ .

Spojitě osově zatížení v horní části (směrem dolů) je  $n_{bc} = 14,25 \text{ kN/m}$ .

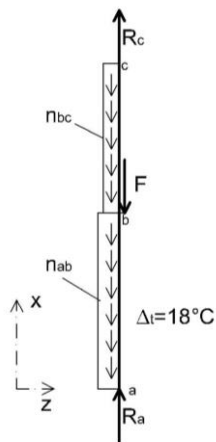
Svislá síla na rozhraní průřezů (v bodě  $b$  - směrem dolů) je  $F = 165 \text{ kN}$ .

Sloup je zahřátý o  $18^\circ\text{C}$  oproti původnímu stavu při montáži.

Určete průběh normálového napětí, normálové síly, poměrného přetvoření a posunutí po délce prutu.



Obr.: výpočtový model



Obr.: Neznámé reakce na prutu

### Řešení

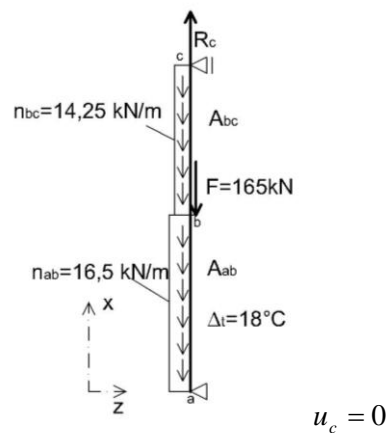
Výpočtový model konstrukce je na obrázku. Vzhledem k neposuvnému uložení obou konců prutů vznikají dvě reakce v ose prutu. Jedná se tedy o staticky neurčitou konstrukci.

Použije se silová metoda řešení staticky neurčitých konstrukcí. Odebere se vazbu proti svislému posunu v podpoře c. Vazbu se nahradí reakcí  $R_c$  a příslušnou deformační (nebo taky kinematickou či geometrickou) podmínkou, kterou vazba zajišťovala.

### **Postup**

- 1) Vytvoření základní staticky určité soustavy
- 2) Posunutí základní staticky určité soustavy
  - 2a) Průběh normálových sil od původního silového zatížení
  - 2b) Určení posunutí bodu c od původního silového zatížení
  - 2c) Určení posunutí bodu c od teplotního zatížení
  - 2d) Určení posunutí bodu c od neznámé reakce  $R_c$
- 3) Určení neznámé reakce  $R_c$  z deformační podmínky
- 4) Určení normálových sil na prutu
- 5) Určení normálových napětí na prutu
- 6) Určení poměrných přetvoření
  - 6a) Poměrné přetvoření od obou silových zatížení
  - 6b) Poměrné přetvoření od teplotního zatížení
  - 6c) Celkové poměrné přetvoření
- 7) Určení posunutí na prutu

Nakreslete základní soustavu a napište doplňkovou geometrickou podmínku.



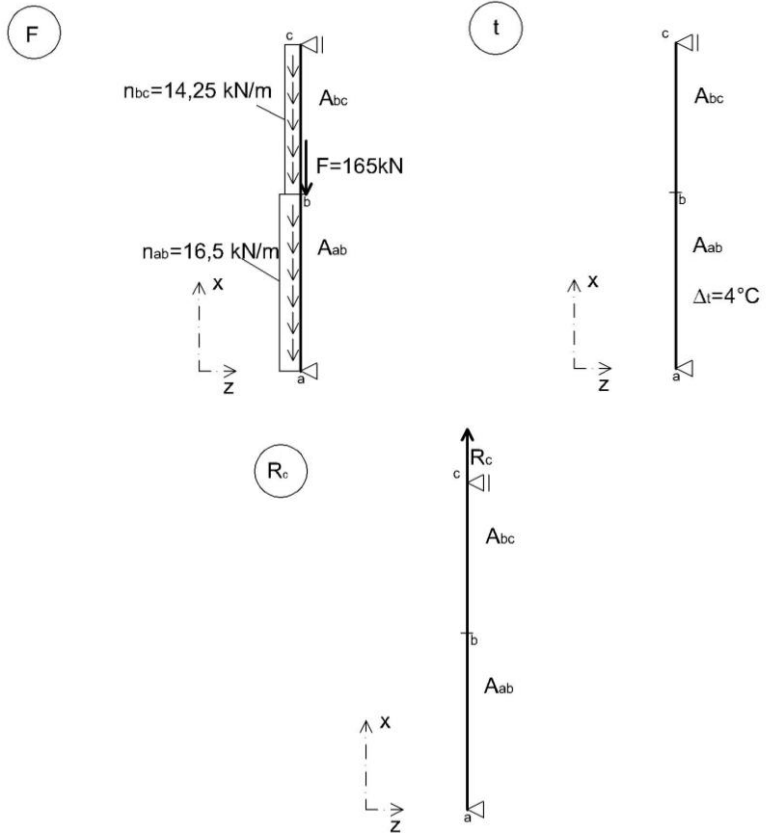
Obr.: Základní staticky určitá soustava

### 1) Vytvoření základní staticky určité soustavy

Takovýto výpočtový model spolu s podmínkou odpovídá původnímu. Příkladná deformační podmínka sloučí k určení neznámé reakce  $R_c$ . Pro určení posunu  $u_c$  je vhodné využít princip superpozice účinků a rozdělit si zatížení prutu na několik zatěžovacích stavů. Jeden zatěžovací stav bude odpovídat silovému zatížení prutu (zatěžovací stav F), další teplotnímu zatížení (zatěžovací stav t) a poslední neznámé reakci  $R_c$  (zatěžovací stav R)

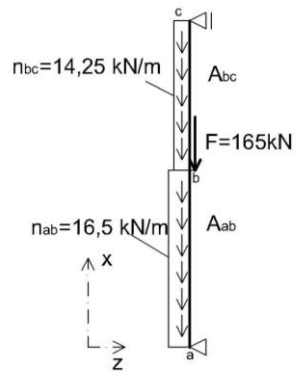
Nekreslete tyto tři zatěžovací stavy základní soustavy.

## 1) Vytvoření základní staticky určité soustavy



Obr.: Zatěžovací stavy základní staticky určité soustavy – silové zatížení, teplotní zatížení a neznámá reakce  $R_c$

F



Obr.: Zatěžovací stav základní staticky určité soustavy – silové zatížení

## 2) Posunutí základní staticky určité soustavy

### 2a) Průběh normálových sil od původního silového zatížení

Určete hodnoty normálových sil v důležitých bodech prutu.

Normálová síla v bodě c:

$$N_{c,F} = (?) \text{ [kN]}$$

Normálová síla v bodě b shora:

$$N_{bc,F} = (?) \text{ [kN]}$$

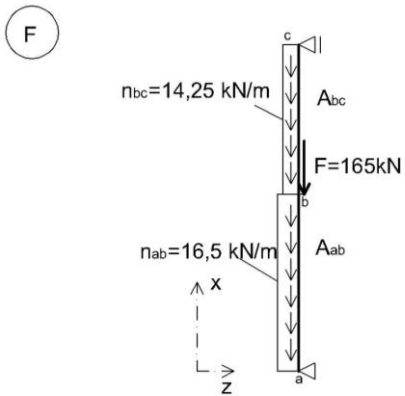
Normálová síla v bodě b zdola:

$$N_{ba,F} = (?) \text{ [kN]}$$

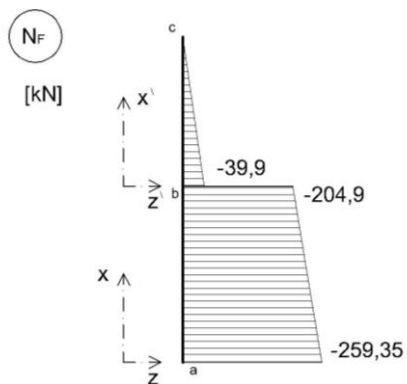
Normálová síla v bodě a:

$$N_{a,F} = (?) \text{ [kN]}$$

Vykreslete průběh normálových sil.



Obr.: Zatěžovací stav základní staticky určité soustavy – silové zatížení



Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený silovým zatížením

## 2a) Průběh normálových sil od původního silového zatížení

Hodnoty normálových sil v důležitých bodech prutu:

$$N_{c,F} = 0$$

$$N_{bc,F} = N_{c,F} - n_{bc}L_{bc} = 0 - 14,25 \cdot 10^3 \cdot 2,8 = -39,9 \text{ kN}$$

$$N_{ba,F} = N_{bc,F} - F = -39,9 \cdot 10^3 - 165 \cdot 10^3 = -204,9 \text{ kN}$$

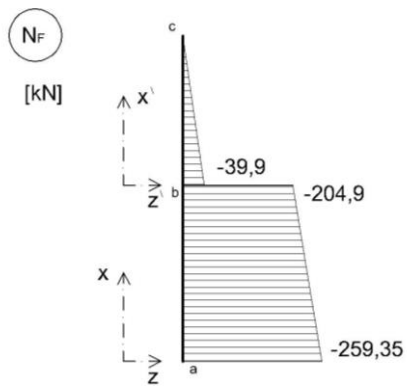
$$N_{a,F} = N_{ba,F} - n_{ab}L_{ab} = -204,9 \cdot 10^3 - 16,5 \cdot 10^3 \cdot 3,3 = -259,35 \text{ kN}$$

Průběh normálových sil:

Spojité osové zatížení prutu je v obou úsecích konstantní funkce. Vzhledem k diferenciální podmínce rovnováhy

$$N' = -n$$

bude funkce normálové síly o stupeň vyšší polynom – tedy funkce lineární.



Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený silovým zatížením

## 2b) Určení posunutí bodu c od původního silového zatížení

Protože je funkce normálové síly v jednotlivých úsecích lineární, použije se integraci po částech pro výpočet posunutí bodu  $c$ . Začne se od neposuvného bodu  $a$ .

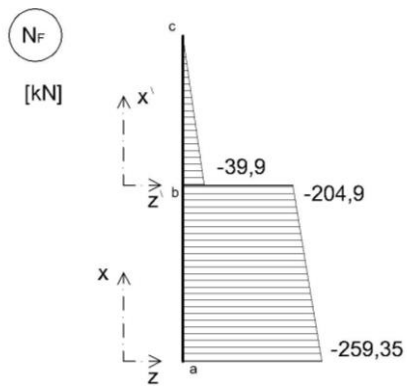
$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Vyjádřete normálovou sílu v úseku a-b jako funkci  $x$ :

$$N(x)_{(a,b)} = (?) + (?) \cdot x \text{ [kN]}$$



Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený silovým zatížením

## 2b) Určení posunutí bodu c od původního silového zatížení

Protože je funkce normálové síly v jednotlivých úsecích lineární, použijte se integraci po částech pro výpočet posunutí bodu  $c$ . Začne se od neposuvného bodu  $a$ .

$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

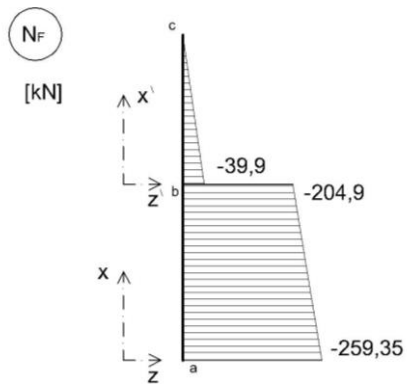
Normálová síla v úseku a-b:

$$N(x)_{(a;b)} = -259,35 + 16,5x \text{ kN}$$

Vyjádřete normálovou sílu v úseku a-b jako funkci  $x'$  (viz obr.):

$$N(x')_{(b;c)} = (?) + (?) \cdot x' \text{ [kN]}$$





Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený silovým zatížením

## 2b) Určení posunutí bodu c od původního silového zatížení

Protože je funkce normálové síly v jednotlivých úsecích lineární, použije se integrace po částech pro výpočet posunutí bodu  $c$ . Začne se od neposuvného bodu  $a$ .

$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Normálová síla v úseku a-b:

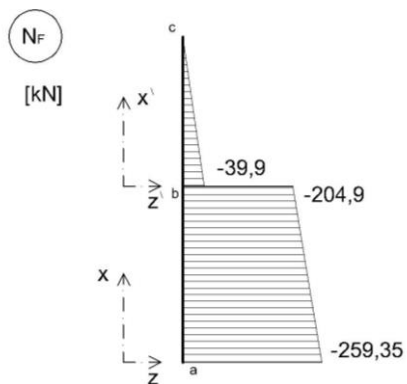
$$N(x)_{(a;b)} = -259,35 + 16,5x \quad kN$$

Normálová síla v úseku b-c:

$$N(x')_{(b;c)} = -39,9 + 14,25x' \quad kN$$

Určete posunutí bodu b:

$$u_{b,F} = (?) \text{ [m]}$$



Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený silovým zatížením

## 2b) Určení posunutí bodu c od původního silového zatížení

Protože je funkce normálové síly v jednotlivých úsecích lineární, použije se integrace po částech pro výpočet posunutí bodu  $c$ . Začne se od neposuvného bodu  $a$ .

$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Normálová síla v úseku a-b:

$$N(x)_{(a;b)} = -259,35 + 16,5x \quad \text{kN}$$

Normálová síla v úseku b-c:

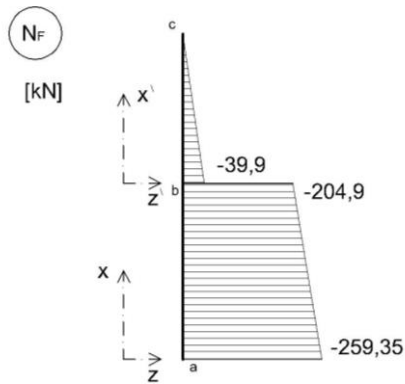
$$N(x')_{(b;c)} = -39,9 + 14,25x' \quad \text{kN}$$

Posunutí bodu b:

$$\begin{aligned} u_{b,F} &= \int_a^b \frac{N(x)}{EA_{ab}} dx = \frac{10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 5,425 \cdot 10^{-3}} \int_0^{3,3} (-259,35 + 16,5x) dx \\ &= \left[ -259,35x + \frac{16,5}{2} x^2 \right]_0^{3,3} = -0,67238 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Určete posunutí bodu c:

$$u_{c,F} = (?) \text{ [m]}$$



Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený silovým zatížením

## 2b) Určení posunutí bodu c od původního silového zatížení

Protože je funkce normálové síly v jednotlivých úsecích lineární, použije se integraci po částech pro výpočet posunutí bodu *c*. Začne se od neposuvného bodu *a*.

$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Vyjádřete normálovou sílu v úseku a-b jako funkci *x*:

$$N(x)_{(a;b)} = -259,35 + 16,5x \quad \text{kN}$$

Vyjádřete normálovou sílu v úseku b-c jako funkci *x'* (viz obr.):

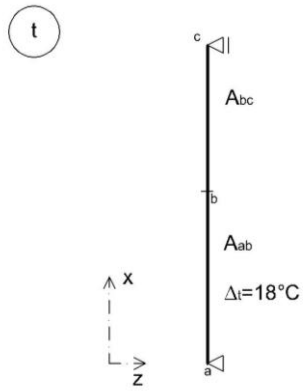
$$N(x')_{(b;c)} = -39,9 + 14,25x' \quad \text{kN}$$

Posunutí bodu b:

$$\begin{aligned} u_{b,F} &= \int_a^b \frac{N(x)}{EA_{ab}} dx = \frac{10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 5,425 \cdot 10^{-3}} \int_0^{3,3} (-259,35 + 16,5x) dx \\ &= \left[ -259,35x + \frac{16,5}{2} x^2 \right]_0^{3,3} = -0,67238 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Posunutí bodu c:

$$\begin{aligned} u_{c,F} &= u_{b,F} + \int_b^c \frac{N(x')}{EA_{bc}} dx' = u_{b,F} + \frac{10^3}{210 \cdot 10^9 \cdot 2,604 \cdot 10^{-3}} \int_0^{2,8} (-39,9 + 14,25x') dx' \\ &= -0,67238 \cdot 10^{-3} + \left[ -39,9x' + \frac{14,25}{2} x'^2 \right]_0^{2,8} = -0,774531 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$



## 2c) Určení posunutí bodu c od teplotního zatížení

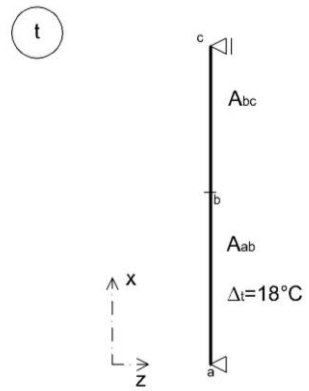
Posunutí od teploty je závislé na veličinách, které jsou konstantní po celé délce nosníku.

Součinitel teplotní roztažnosti je  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

Určete hodnotu posunutí v bodě c:

$$u_{c,t} = (?) \text{ [m]}$$

Obr.: Zatěžovací stavy základní staticky určité soustavy – teplotní zatížení



## 2c) Určení posunutí bodu c od teplotního zatížení

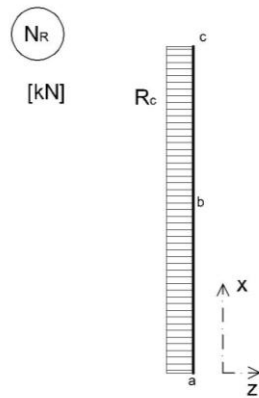
Posunutí od teploty je závislé na veličinách, které jsou konstantní po celé délce nosníku.

Součinitel teplotní roztažnosti je  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

Posunutí v bodě c:

$$u_{c,t} = \alpha_t \Delta_t L_{ac} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 18 \cdot 6,1 = 1,3176 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Obr.: Zatěžovací stavy základní staticky určité soustavy – teplotní zatížení



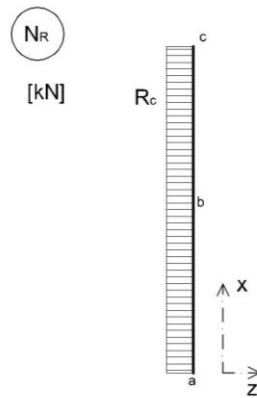
Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený neznámou reakcí  $R_c$

## 2d) Určení posunutí bodu c od neznámé reakce $R_c$

Průběh normálové síly od reakce je konstantní po celé délce. Vzhledem k tomu, že tuhost  $EA$  je po délce po částech konstantní, je možné pro výpočet posunutí použít sumační vztah.

Určete posun bodu c způsobený neznámou reakcí  $R_c$ :

$$u_{c,F} = (?) \cdot R_c$$



Obr.: Průběh normálových sil na základní soustavě způsobený neznámou reakcí  $R_c$

## 2d) Určení posunutí bodu c od neznámé reakce $R_c$

Průběh normálové síly od reakce je konstantní po celé délce. Vzhledem k tomu, že tuhost  $EA$  je po délce po částech konstantní, je možné pro výpočet posunutí použít sumační vztah.

$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Posun bodu c způsobený neznámou reakcí  $R_c$ :

$$\begin{aligned} u_{c,F} &= \sum \frac{N_i L_i}{EA_i} = \frac{R_c}{E} \left( \frac{L_{ab}}{A_{ab}} + \frac{L_{bc}}{A_{bc}} \right) \\ &= \frac{R_c}{210 \cdot 10^9} \left( \frac{3,3}{5,425 \cdot 10^{-3}} + \frac{2,8}{2,604 \cdot 10^{-3}} \right) = 8,01697 \cdot 10^{-9} R_c \end{aligned}$$

### 3) Určení neznámé reakce $R_c$ z deformační podmínky

Dosaďte jednotlivá posunutí do deformační podmínky a určete reakci  $R_c$ .

$$u_c = 0$$

$$R_c = (?) \text{ [kN]}$$



### 3) Určení neznámé reakce $R_c$ z deformační podmínky

Podmínka nulového posunu bodu c:

$$u_c = 0$$

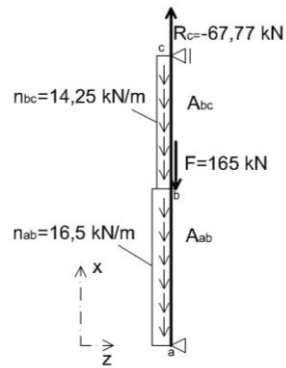
Celkový posun bodu c je složen ze tří vlivů – posunu od původního silového zatížení, posunu od neznámé reakce a posunu od teplotního zatížení.

$$u_{c,F} + u_{c,t} + u_{c,R} = 0$$

$$-0,774531 \cdot 10^{-3} + 1,3176 \cdot 10^{-3} + 8,0,1697 \cdot 10^{-9} R_c = 0$$

Reakce v bodě c:

$$R_c = 67,77 \cdot 10^3 = -67,77 \text{ kN}$$



Obr. Silové zatížení staticky určité soustavy

#### 4) Určení normálových sil na prutu

Výsledný průběh normálových sil lze získat ze silového zatížení staticky určité soustavy, tedy jako součet diagramů  $N_F$  a  $N_R$ .

Určete normálovou sílu v bodě c:

$$N_c = (?) \text{ [kN]}$$

Určete normálovou sílu v bodě b shora:

$$N_{bc} = (?) \text{ [kN]}$$

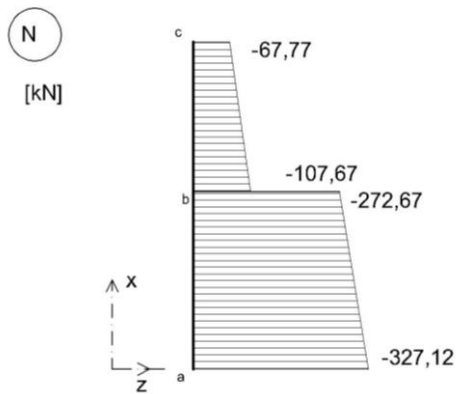
Určete normálovou sílu v bodě b zdola:

$$N_{ba} = (?) \text{ [kN]}$$

Určete normálovou sílu v bodě a:

$$N_a = (?) \text{ [kN]}$$

Vykreslete průběh vnitřních sil.



#### 4) Určení normálových sil na prutu

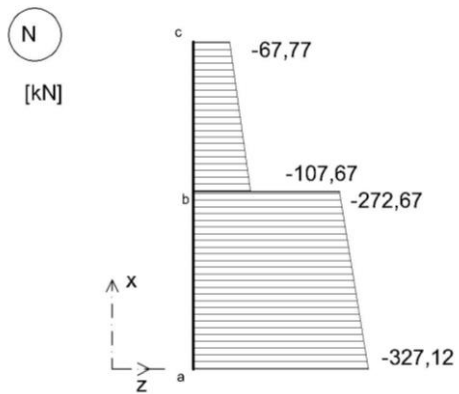
$$N_c = R_c + N_{c,F} = -67,77 \cdot 10^3 + 0 = 67,77 \text{ kN}$$

$$N_{bc} = R_c + N_{bc,F} = -67,77 \cdot 10^3 - 39,9 \cdot 10^3 = -107,67 \text{ kN}$$

$$N_{ba} = R_c + N_{ba,F} = -67,77 \cdot 10^3 - 204,9 \cdot 10^3 = -272,67 \text{ kN}$$

$$N_a = R_c + N_{a,F} = -67,77 \cdot 10^3 - 259,35 \cdot 10^3 = -327,12 \text{ kN}$$

Obr.: Průběh normálových sil na staticky neurčitě podepřeném prutu



Obr.: Průběh normálových sil na staticky neurčitě podepřeném prutu

### 5) Určení normálových napětí na prutu

Průběh napětí lze získat z průběhu normálové síly.

$$A_1 = 5,425 \cdot 10^{-3}$$

$$A_2 = 2,604 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Určete normálové napětí v průřezu c:

$$\sigma_c = (?) \text{ [MPa]}$$

Určete normálové napětí v průřezu b shora:

$$\sigma_{bc} = (?) \text{ [MPa]}$$

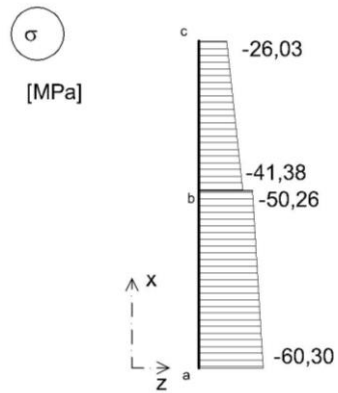
Určete normálové napětí v průřezu b zdola:

$$\sigma_{ba} = (?) \text{ [MPa]}$$

Určete normálové napětí v průřezu a:

$$\sigma_a = (?) \text{ [MPa]}$$

Vykreslete průběh normálových napětí po délce prutu.



Obr.: Průběh normálových napětí na staticky neurčitě podepřeném prutu

### 5) Určení normálových napětí na prutu

Normálové napětí v průřezu c:

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_{bc}} = \frac{-67,77 \cdot 10^3}{2,604 \cdot 10^{-3}} = 26,025 \cdot 10^6 = -26,03 \text{ MPa}$$

Normálové napětí v průřezu b shora:

$$\sigma_{bc} = \frac{N_{bc}}{A_{bc}} = \frac{-107,67 \cdot 10^3}{2,604 \cdot 10^{-3}} = 41,38 \cdot 10^6 = -41,38 \text{ MPa}$$

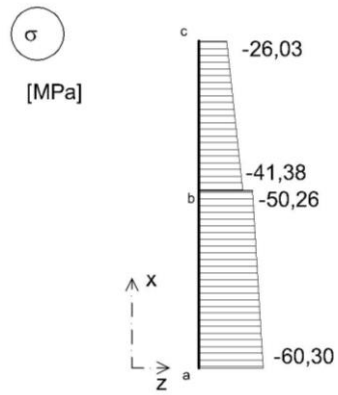
Normálové napětí v průřezu b zdola:

$$\sigma_{ba} = \frac{N_{ba}}{A_{ab}} = \frac{-272,67 \cdot 10^3}{5,425 \cdot 10^{-3}} = 50,26 \cdot 10^6 = -50,26 \text{ MPa}$$

Normálové napětí v průřezu a:

$$\sigma_a = \frac{N_a}{A_{ab}} = \frac{-327,12 \cdot 10^3}{5,425 \cdot 10^{-3}} = 60,30 \cdot 10^6 = -60,30 \text{ MPa}$$

Průběh napětí v jednotlivých úsecích je opět lineární, protože mezi normálovou silou a napětím určuje pouze konstanta A.



Obr.: Průběh normálových napětí na staticky neurčitě podepřeném prutu

## 6) Určení poměrných přetvoření

### 6a) Poměrné přetvoření od obou silových zatížení

Poměrné přetvoření způsobené silovým zatížením (zatížením F a reakcí  $R_c$ ) určíme z Hookova zákona.

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Určete poměrné přetvoření v bodě c:

$$\varepsilon_{c,F+R} = (?) [-]$$

Určete poměrné přetvoření v bodě b shora:

$$\varepsilon_{bc,F+R} = (?) [-]$$

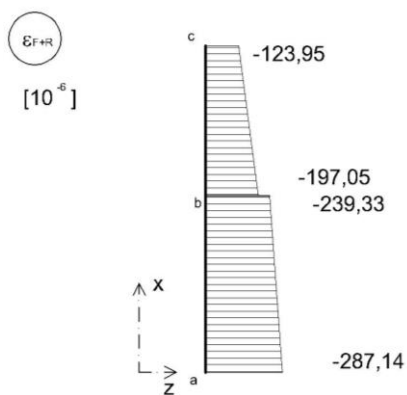
Určete poměrné přetvoření v bodě b zdola:

$$\varepsilon_{ba,F+R} = (?) [-]$$

Určete poměrné přetvoření v bodě a:

$$\varepsilon_{a,F+R} = (?) [-]$$

Vykreslete průběhy poměrného přetvoření od silových zatížení po délce prutu.



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na základní soustavě způsobený silovým zatížením a reakcí  $R_c$

### 6a) Poměrné přetvoření od obou silových zatížení

Poměrné přetvoření způsobené silovým zatížením (zatížením  $F$  a reakcí  $R_c$ ) určíme z Hookova zákona.

$$E = 210 \text{ GPa}$$

Poměrné přetvoření v bodě c:

$$\varepsilon_{c,F+R} = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{-26,03 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = -123,95 \cdot 10^{-6}$$

Poměrné přetvoření v bodě b shora:

$$\varepsilon_{bc,F+R} = \frac{\sigma_{bc}}{E} = \frac{-41,38 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = -197,05 \cdot 10^{-6}$$

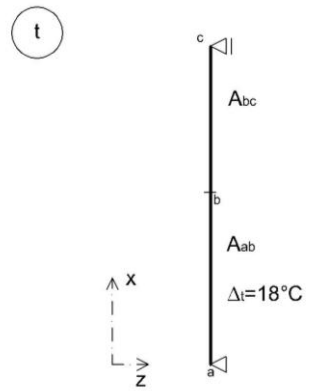
Poměrné přetvoření v bodě b zdola:

$$\varepsilon_{ba,F+R} = \frac{\sigma_{ba}}{E} = \frac{-50,26 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = -239,33 \cdot 10^{-6}$$

Poměrné přetvoření v bodě a:

$$\varepsilon_{a,F+R} = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{-60,30 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = -287,14 \cdot 10^{-6}$$

Průběh poměrných přetvoření v jednotlivých úsecích je opět lineární, protože mezi napětím a poměrným přetvořením určuje pouze konstanta  $E$ .



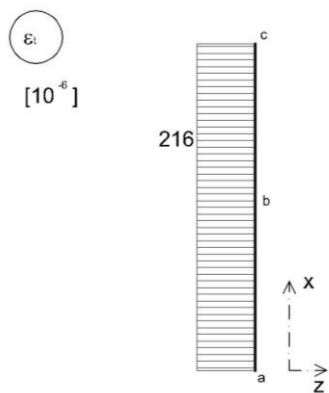
Obr.: Teplotní zatížení základní staticky určité soustavy.

### 6b) Poměrné přetvoření od teplotního zatížení

Poměrné přetvoření od teploty je konstantní po délce prutu.  
 Součinitel teplotní roztažnosti je  $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

Určete hodnotu poměrného přetvoření prutu vlivem teploty  
 $\varepsilon_t = (?) [-]$



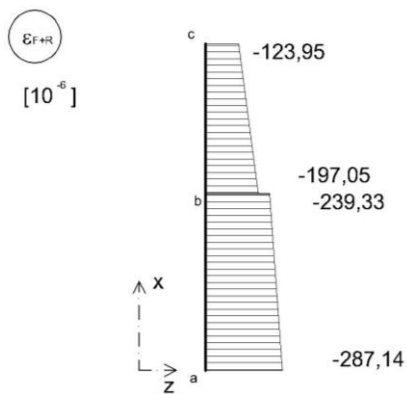


Obr.: Průběh poměrných přetvoření na základní soustavě způsobený teplotním zatížením

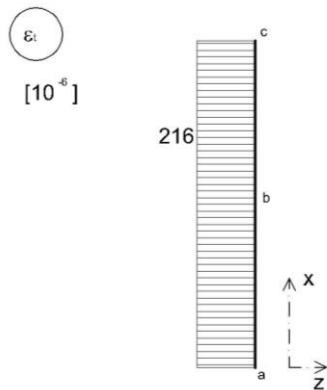
### 6b) Poměrné přetvoření od teplotního zatížení

Poměrné přetvoření od teploty je konstantní po délce prutu.

$$\varepsilon_t = \alpha_t \Delta_t = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 18 = 216 \cdot 10^{-6}$$



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na základní soustavě způsobený silovým zatížením a reakcí  $R_c$



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na základní soustavě způsobený teplotním zatížením

### 6c) Celkové poměrné přetvoření

Celkové poměrné přetvoření je součtem poměrného přetvoření na základní staticky určité soustavě způsobeného silovými a teplotními účinky.

Určete poměrné přetvoření v bodě c:

$$\varepsilon_c = (?) [-]$$

Určete poměrné přetvoření v bodě b shora:

$$\varepsilon_{bc} = (?) [-]$$

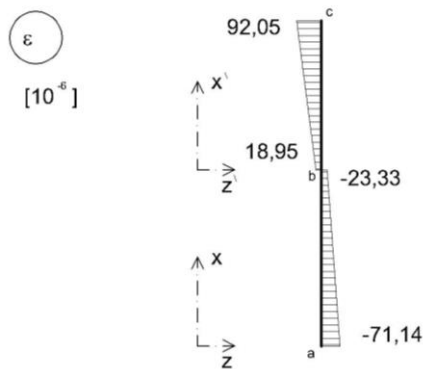
Určete poměrné přetvoření v bodě b zdola:

$$\varepsilon_{ba} = (?) [-]$$

Určete poměrné přetvoření v bodě a:

$$\varepsilon_a = (?) [-]$$

Vykreslete výsledný průběh poměrných přetvoření prutu.



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na staticky neurčitě podepřeném prutu

### 6c) Celkové poměrné přetvoření

Poměrné přetvoření v bodě c:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{c, F+R} + \varepsilon_t = -123,95 \cdot 10^{-6} + 216 \cdot 10^{-6} = 92,05 \cdot 10^{-6}$$

Poměrné přetvoření v bodě b shora:

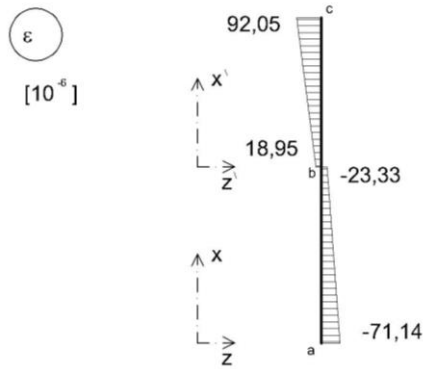
$$\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{bc, F+R} + \varepsilon_t = -197,05 \cdot 10^{-6} + 216 \cdot 10^{-6} = 18,95 \cdot 10^{-6}$$

Poměrné přetvoření v bodě b zdola:

$$\varepsilon_{ba} = \varepsilon_{ba, F+R} + \varepsilon_t = -239,33 \cdot 10^{-6} + 216 \cdot 10^{-6} = -23,33 \cdot 10^{-6}$$

Poměrné přetvoření v bodě a:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{a, F+R} + \varepsilon_t = -287,14 \cdot 10^{-6} + 216 \cdot 10^{-6} = -71,14 \cdot 10^{-6}$$



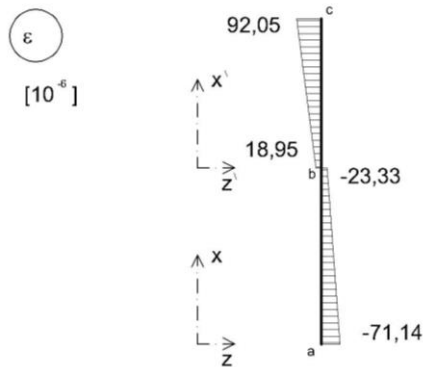
### 7) Určení posunutí na prutu

Posunutí se získá integrací funkce poměrného přetvoření. K tomu je třeba vyjádřit poměrné přetvoření jako funkci souřadnice x. Pro každou část je možné použít jiný lokální souřadný systém, viz obrázek.

Určete funkci poměrného přetvoření v úseku a-b:

$$\varepsilon(x) = (?) + (?) \cdot x \quad [-]$$

Obr.: Průběh poměrných přetvoření na staticky neurčitě podepřeném prutu



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na staticky neurčitě podepřeném prutu

### 7) Určení posunutí na prutu

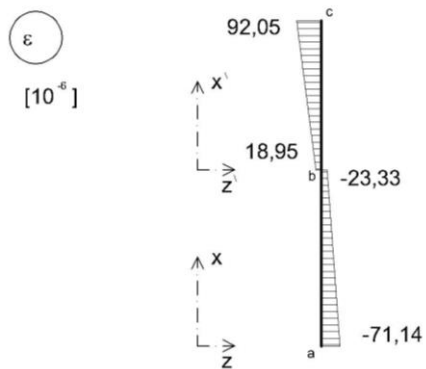
Posunutí se získá integrací funkce poměrného přetvoření. K tomu je třeba vyjádřit poměrné přetvoření jako funkci souřadnice  $x$ . Pro každou část je možné použít jiný lokální souřadný systém, viz obrázek.

Funkce poměrného přetvoření v úseku a-b:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \varepsilon_a + \frac{\varepsilon_{ba} - \varepsilon_a}{L_{ab}} x = -71,14 \cdot 10^{-6} + \frac{-23,33 \cdot 10^{-6} - (-71,14 \cdot 10^{-6})}{3,3} x \\ &= (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Určete funkci poměrného přetvoření v úseku a-b:

$$\varepsilon(x') = (?) + (?) \cdot x \quad [-]$$



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na staticky neurčitě podepřeném prutu

## 7) Určení posunutí na prutu

Posunutí získáme integrací funkce poměrného přetvoření. K tomu je třeba vyjádřit poměrné přetvoření jako funkci souřadnice  $x$ . Pro každou část je možné použít jiný lokální souřadný systém, viz obrázek.

Funkce poměrného přetvoření v úseku a-b:

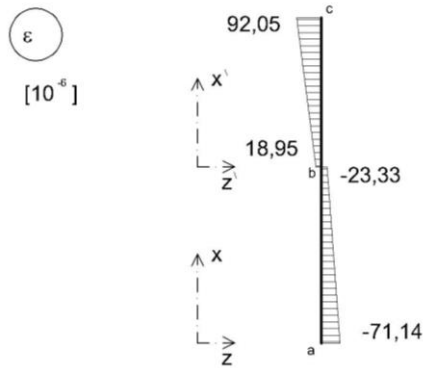
$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \varepsilon_a + \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{L_{ab}} x = -71,14 \cdot 10^{-6} + \frac{-23,33 \cdot 10^{-6} - (-71,14 \cdot 10^{-6})}{3,3} x \\ &= (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Funkce poměrného přetvoření v úseku b-c:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x') &= \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_b}{L_{bc}} x' = 18,95 \cdot 10^{-6} + \frac{92,05 \cdot 10^{-6} - 18,95 \cdot 10^{-6}}{2,8} x' \\ &= (18,95 + 26,12x') \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Určete posunutí bodu b:

$$u_b = (?) \text{ [m]}$$



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na staticky neurčitě podepřeném prutu

## 7) Určení posunutí na prutu

Posunutí získáme integrací funkce poměrného přetvoření. K tomu je třeba vyjádřit poměrné přetvoření jako funkci souřadnice  $x$ . Pro každou část je možné použít jiný lokální souřadný systém, viz obrázek.

Funkce poměrného přetvoření v úseku a-b:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \varepsilon_a + \frac{\varepsilon_{ba} - \varepsilon_a}{L_{ab}} x = -71,14 \cdot 10^{-6} + \frac{-23,33 \cdot 10^{-6} - (-71,14 \cdot 10^{-6})}{3,3} x \\ &= (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Funkce poměrného přetvoření v úseku b-c:

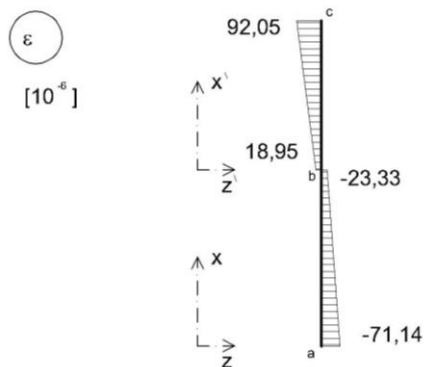
$$\begin{aligned}\varepsilon(x') &= \varepsilon_{bc} + \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{bc}}{L_{bc}} x' = 18,95 \cdot 10^{-6} + \frac{92,05 \cdot 10^{-6} - 18,95 \cdot 10^{-6}}{2,8} x' \\ &= (18,95 + 26,12x') \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Posunutí bodu b:

$$\begin{aligned}u_b &= \int_a^b \varepsilon(x) dx = \int_0^{3,3} (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6} dx \\ &= \left[ -71,14x + \frac{14,49}{2} x^2 \right]_0^{3,3} = -155,864 \cdot 10^{-6} m\end{aligned}$$

Hodnota posunutí v bodě  $c$  slouží pro kontrolu. Vyjděte z hodnoty posunu v bodě b a Určete posunutí v bodě c:

$$u_c = (?) [m]$$



Obr.: Průběh poměrných přetvoření na staticky neurčitě podepřeném prutu

## 7) Určení posunutí na prutu

Posunutí získáme integrací funkce poměrného přetvoření. K tomu je třeba vyjádřit poměrné přetvoření jako funkci souřadnice  $x$ . Pro každou část je možné použít jiný lokální souřadný systém, viz obrázek.

Funkce poměrného přetvoření v úseku a-b:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \varepsilon_a + \frac{\varepsilon_{ba} - \varepsilon_a}{L_{ab}} x = -71,14 \cdot 10^{-6} + \frac{-23,33 \cdot 10^{-6} - (-71,14 \cdot 10^{-6})}{3,3} x \\ &= (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Funkce poměrného přetvoření v úseku b-c:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x') &= \varepsilon_{bc} + \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{bc}}{L_{bc}} x' = 18,95 \cdot 10^{-6} + \frac{92,05 \cdot 10^{-6} - 18,95 \cdot 10^{-6}}{2,8} x' \\ &= (18,95 + 26,12x') \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Posunutí bodu b:

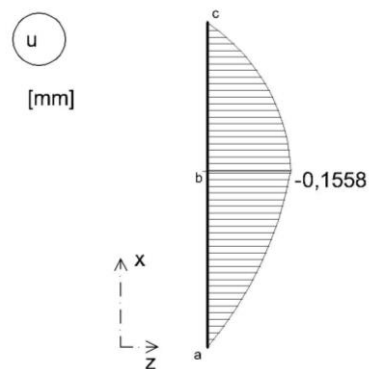
$$\begin{aligned}u_b &= \int_a^b \varepsilon(x) dx = \int_0^{3,3} (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6} dx \\ &= \left[ -71,14x + \frac{14,49}{2} x^2 \right]_0^{3,3} = -155,864 \cdot 10^{-6} m\end{aligned}$$

Hodnota posunutí v bodě c :

$$\begin{aligned}u_c &= u_b + \int_b^c \varepsilon(x') dx' = \int_0^{2,8} (18,95 + 26,12x') \cdot 10^{-6} dx' = \left[ 18,95x' + \frac{26,12}{2} x'^2 \right]_0^{2,8} \\ &= -155,864 + 155,450 \cdot 10^{-6} = -0,414 \cdot 10^{-6} m \approx 0\end{aligned}$$

Vykreslete průběh posunutí.





Obr.: Výsledný průběh posunutí  $u_x$  na prutu

## 7) Určení posunutí na prutu

Funkce poměrného přetvoření v úseku a-b:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_a + \frac{\varepsilon_{ba} - \varepsilon_a}{L_{ab}} x = -71,14 \cdot 10^{-6} + \frac{-23,33 \cdot 10^{-6} - (-71,14 \cdot 10^{-6})}{3,3} x$$

$$= (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6}$$

Funkce poměrného přetvoření v úseku b-c:

$$\varepsilon(x') = \varepsilon_{bc} + \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{bc}}{L_{bc}} x' = 18,95 \cdot 10^{-6} + \frac{92,05 \cdot 10^{-6} - 18,95 \cdot 10^{-6}}{2,8} x'$$

$$= (18,95 + 26,12x') \cdot 10^{-6}$$

Posunutí bodu b:

$$u_b = \int_a^b \varepsilon(x) dx = \int_0^{3,3} (-71,14 + 14,49x) \cdot 10^{-6} dx$$

$$= \left[ -71,14x + \frac{14,49}{2} x^2 \right]_0^{3,3} = -155,864 \cdot 10^{-6} m$$

Hodnota posunutí v bodě c :

$$u_c = u_b + \int_b^c \varepsilon(x') dx' = \int_0^{2,8} (18,95 + 26,12x') \cdot 10^{-6} dx' = \left[ 18,95x' + \frac{26,12}{2} x'^2 \right]_0^{2,8}$$

$$= -155,864 + 155,450 \cdot 10^{-6} = -0,414 \cdot 10^{-6} m \approx 0$$

Derivací funkce posunutí je po částech lineární funkce poměrného přetvoření. Funkce posunutí bude proto funkcí o stupeň vyššího polynomu, funkcí kvadratickou v jednotlivých úsecích. Na rozhraní úseků je různá derivace shora a zdola a v průběhu posunutí to znamená zlom v diagramu.